II. On considère la suite (I_n) définie par

$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$, $n \geq 0$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2^n} + (2n-1)I_n\right)$.

3. Calculer I_2, I_3 et I_4.

III. On considère la suite (J_n) définie par

$J_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $J_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$, $n \geq 1$.

1. a. Vérifier que pour tout n, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{1+2n}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

2 a. Montrer que pour tout n, $J_{n+1} + J_n = \frac{1}{1+2n}$.

b. Calculer J_1, J_2, J_3, J_4 et J_5.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{(-1)^n}{1+2n}$.

a. Montrer que pour tout n, $J_{n+1} = (-1)^n(u_n - J_0)$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

37 Soit la suite (I_n) définie par

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$, $n \geq 1$.

1. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

2. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1+2x)x^{n+1}}{(1+x+x^2)^2} dx$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$1 + \frac{1}{3(n+2)} \leq 3(n+1)I_n \leq 1 + \frac{3}{n+2}$.

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

38 On considère la fonction F définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$.

1. Vérifier que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$.

3. Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$.

4. Etudier les variations de F.

5. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

39 On considère la fonction f définie sur $[-2,2]$ par $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$.

1. Etudier f et représenter sa courbe C dans un repère orthonormé.

2. Soit F la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$F(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2} dt$.

a. Montrer que F est dérivable sur $[0, \pi]$ et que

$F'(x) = -4\sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$.

b. Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c. En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$F(x) = -2x + \sin(2x) + \pi$.

3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations, $y = x$, $x = -2$ et $x = 2$.

a. Montrer que $\mathcal{A} = F(0) - F(\pi)$.

b. En déduire $\mathcal{A}$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn